Umrechnung von Einheiten:

Vorsätze von Einheiten stehen ersatzweise für einen Faktor. Dadurch verkürzt sich die Schreibweise.
Zur Erinnerung:

Vorsatz	Faktor	In Exponentenschreibweise
p-Piko	0.000 000 000 001	10^{-12}
n-Nano	0.000 000 001	10^{-9}
µ-Mikro	0.000 001	10^{-6}
m-Milli	0. 001	10^{-3}
k-Kilo	1000	10^{3}
M-Mega	1000 000	10^{6}
G-Giga	1000 000 000	10^{9}

Will man eine Einheit mit Vorsatz umrechnen, so geht man zweckmäßigerweise wie folgt vor:

1. Beseitigung des alten Vorsatzes durch Ersatz mit Faktor
2. Einführung der neuen Vorsilbe zusammen mit einem zahlenmäßigen Korrekturfaktor, beide zusammen müssen Eins ergeben (hier in eckige Klammern gesetzt).

$$0{,}051\,A = 0{,}051\left[\frac{k}{1000}\right]A = \underline{0{,}000051\,kA} \qquad \left[\frac{k}{1000}\right] = 1!!$$

$$0{,}051\,A = 0{,}051\left[m \cdot 1000\right]A = \underline{51\,mA} \qquad \left[m \cdot 1000\right] = 1!!$$

$$51\,mA = 51 \cdot 0{,}001 \cdot A = 51 \cdot 0{,}001 \cdot \left[10^{6} \cdot n\right]A = \underline{51 \cdot 10^{6}\,nA}$$

$$51 \cdot 10^{6}\,nA = 51 \cdot 10^{6} \cdot 10^{-9} \cdot A = 51 \cdot 10^{6} \cdot 10^{-9} \cdot \left[p \cdot 10^{12}\right]A = \underline{51 \cdot 10^{9}\,pA}$$

Bei einiger Übung kann man die Zehnerpotenzen natürlich auch schnell automatisch zusammenfassen. Bei diesem Beispiel ist mA die zweckmäßigste Einheit.
Haben Sie etwas bemerkt? Die Einheiten werden nicht, wie Variable, kursiv geschrieben.

Bei einigen Einheiten muss man die Synonyme kennen. Je nach Anwendung werden verschiedene Symbole für die Einheiten verwendet. Besonders intensiv ist das bei der Einheit der Energie. Je nach Auftreten als elektrische Energie, Wärmeenergie oder mechanische Energie werden verschiedene Buchstaben benutzt. Das ist auch länderspezifisch, in den USA kennt man vorwiegend das J(oule).

	SI-Einheit	Abkürzung
Mechanik	Newton Meter	Nm
Elektrotechnik	Wattsekunde, Kilowattstunde, Megawattstunde	Ws kWh MWh
Kalorik, Chemie	Joule Kilojoule Magejoule	J kJ MJ

Sie **müssen** folgende Gesetzmäßigkeit kennen und können:

1 J = 1 Ws = 1 Nm

Daraus lassen sich alle anderen Einheiten ableiten.

$$1\text{Nm} = 1\text{Ws} = \frac{\text{k}}{1000} \cdot \text{W} \cdot \frac{\text{h}}{3600} = \frac{1}{3600000}\text{kWh} \approx 2{,}78 \cdot 10^{-07}\text{kWh}$$

Ein letztes Beispiel:

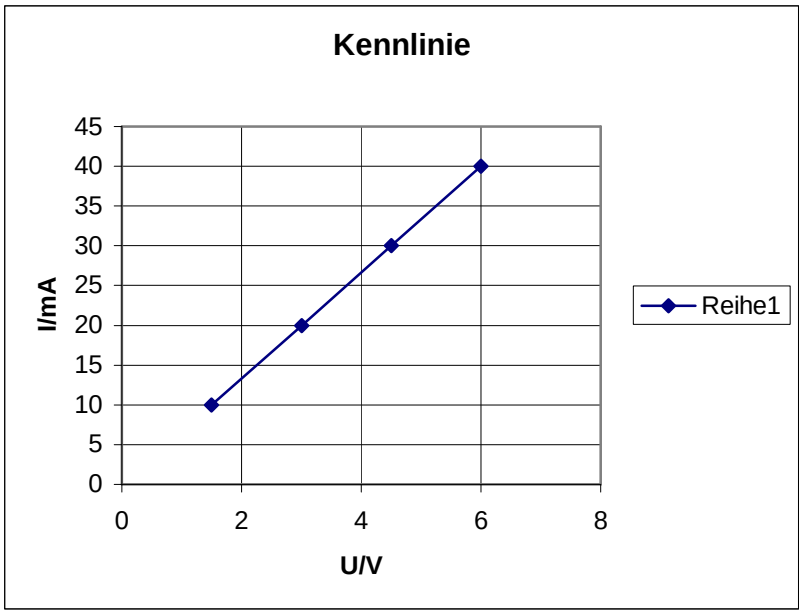
$$1\frac{\text{km}}{\text{h}} = 1\frac{1000\text{m}}{3600\text{s}} \approx 0{,}278\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Kennlinie eines Bauelementes:

Aus einer Messreihe an einem Bauelement ergaben sich folgende Werte für Strom und Spannung:

I/mA	10	20	30	40
U/V	1,5	3	4,5	6

Trägt man diese Werte in ein Diagramm ein, so erkennt man deutlich den linearen Zusammenhang.



a)

Wir setzen für die Größengleichung an: $I = k \cdot U \qquad k = \frac{I}{U}$

Zum Beipiel: I = 10 mA, U = 1,5 V $\rightarrow$ k = 6,66 mA/V

b) Zugeschnittene Größengleichung

$$I = 6{,}66\,\text{mA}/\text{V} \cdot U \,|\, :\text{mA}$$

$$\underline{I/\text{mA} = 6{,}66 \cdot U/\text{V}}$$

c)

I/mA	10	20	30	40
U/V	1,5	3	4,5	6
$U/I=R$	150 V/A	150 V/A	150 V/A	150 V/A

R ist konstant!

Da Die Funktion eine Gerade ist, beträgt der Grenzwert U/I für U = 0 und I = 0 ebenfalls R = 150 V/A = 150 Ω.

Kurvenanpassung

U/V	0	1	2	3	4	5
I/mA	0	0,5	2	4,5	8	12,5

a)
Darstellung in doppelt logarithmischer Form:

$$I/\text{mA} = a \cdot (U/\text{V})^b \Big| \ln()$$

$$\ln(I/\text{mA}) = \ln\left(a \cdot (U/\text{V})^b\right) \qquad \text{Logarithmengesetze!}$$

$$\ln(I/\text{mA}) = \ln(a) + b\ln(U/\text{V})$$

$$y = mx + n;$$

mit

$$y = \ln(I/\text{mA});\ m = b;\ x = \ln(U/\text{V});\ n = \ln(a)$$

$$U/V = 1; I/mA = 0,5 \rightarrow x = 0; y =$$

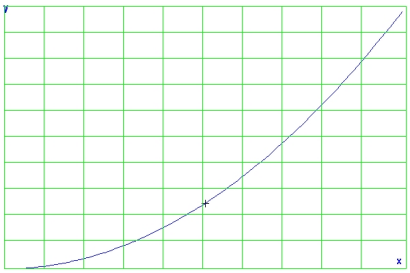
$$\underline{n = -0,69}$$

$$m = \frac{y-n}{x} \qquad \text{für } U/\text{V} = 2;\ I/\text{mA} = 2 \rightarrow y = 0,69; x = 0,69$$

$$m = \frac{0,69 + 0,69}{0,69} = 2$$

Auf eine grafische Darstellung wird an dieser Stelle verzichtet, Geraden sind im Internet genügend zu finden.

c)
Bestimmung von a und b



$$b = m = 2$$

$$a = e^n = 0,5$$

$$I/\text{mA} = 0,5(U/\text{V})^2$$

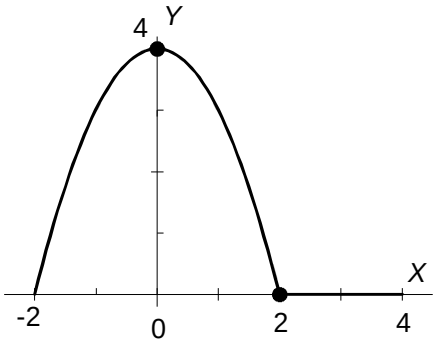
d)

U/V	0,5	3,5	6
I/mA	0,125	6,125	18

Strom, Ladung

Gegeben ist das Oszillografenbild. Gesucht ist der Spannungsverlauf und die in einer Periode transportierte Ladung.

Der Scheitelpunkt der Parabel wird in den Nullpunkt verschoben. Damit ergibt sich folgendes Bild:



Wir stellen zunächst die grafische Funktion dar. Dazu gelten zwei Abschnitte.

1) Parabel:

$$Y = A - BX^2$$

$$\text{für } X = 0 \rightarrow Y = 4\,\text{cm} \rightarrow A = 4\,\text{cm}$$

$$\text{für } X = 2\,\text{cm} \rightarrow Y = 0 \rightarrow B = \frac{A}{X^2} = \frac{4}{4\,\text{cm}}$$

$$Y = 4\,\text{cm} - \frac{1}{\text{cm}} X^2 = 4\,\text{cm} - \frac{\text{cm}}{\text{cm}^2} X^2 = 4\,\text{cm} - \left(X / \text{cm}\right)^2 \text{cm}$$

$$Y/\text{cm} = 4 - \left(X / \text{cm}\right)^2$$

2) Nulllinie: Y = 0

3) Gesamtdarstellung

$$\text{Y/cm} = \begin{cases} 4 - (X / \text{cm})^2 & \text{für -2 cm} \le X \le 2\,\text{cm} \\ 0 & \text{für 2 cm} < X \le 4\,\text{cm} \end{cases}$$

b) Darstellung der Zeitfunktion:

Umrechnung der Achsen

$$t = \frac{100\,\text{ns}}{\text{cm}} X \qquad U = \frac{1\,\text{V}}{\text{cm}} Y$$

$$X = \frac{\text{cm}}{100\text{ ns}} t \qquad Y = \frac{\text{cm}}{1\text{ V}} U$$

$$U/\mathrm{V}=\begin{cases} 4-(t/100\ \mathrm{ns})^2 & \text{für -200 ns} \le t \le 200\,ns \\ 0 & \text{für 200 ns} < t \le 400\mathrm{ns} \end{cases}$$

$$U/\mathrm{V}=\begin{cases} 4-(t/0{,}1\ \mu\mathrm{s})^2 & \text{für -200 ns} \le t \le 200\,ns \\ 0 & \text{für 200 ns} < t \le 400\mathrm{ns} \end{cases}$$

$$U/\mathrm{V}=\begin{cases} 4-\frac{1}{0{,}01}(t/\mu\mathrm{s})^2 & \text{für -200 ns} \le t \le 200\,ns \\ 0 & \text{für 200 ns} < t \le 400\mathrm{ns} \end{cases}$$

$$U/\mathrm{V}=\begin{cases} 4-100(t/\mu\mathrm{s})^2 & \text{für -200 ns} \le t \le 200\,ns \\ 0 & \text{für 200 ns} < t \le 400\mathrm{ns} \end{cases}$$

c) Ladung durch den Widerstand R = 50 Ω

Ladung wird nur in der Zeittransportiert, in der Strom fließt, das heißt, wo Spannung über dem Messwiderstand anliegt. Benötigt wird zunächst der Strom I.

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{50\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}} = \frac{U}{50\,\frac{V}{1000\,\mathrm{mA}}}$$

$$I/\mathrm{mA} = 20\,U/\mathrm{V}$$

$$I/\mathrm{mA} = 20\left(4-100\,(t/\mu\mathrm{s})^2\right) = 80-2000\,(t/\mu\mathrm{s})^2$$

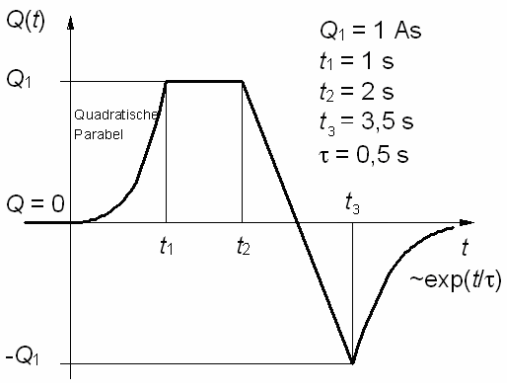
Für die Ladung, die durch den Widerstand fließt, gilt:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt = \int_{-0{,}2\mu\mathrm{s}}^{0{,}2\mu\mathrm{s}} I(t)dt = \int_{-0{,}2\mu s}^{0{,}2\mu\mathrm{s}} \left(80-2000\left(\frac{t}{\mu\mathrm{s}}\right)^2\right)dt \cdot \mathrm{mA} =$$

$$\left| 80\cdot t - \frac{2000}{3}\cdot\mu\mathrm{s}\cdot\left(\frac{t}{\mu\mathrm{s}}\right)^3 \right|_{-0{,}2\mu\mathrm{s}}^{2\mu\mathrm{s}} \cdot \mathrm{mA} = \underline{21{,}33\mathrm{nAs}}$$

Ladung, Strom

Gegeben ist der folgende Ladungsverlauf:



Zu berechnen ist der Stromverlauf:

Allgemein gilt: $I(t)=\frac{dQ(t)}{dt}$

Also muss für jeden Abschnitt die Funktion Q(t) bekannt sein und dann differenziert werden.

Tip: Zunächst die Basisvariante einer jeden Funktion suchen und dann in x- und y Richtung verschieben

a) Die Parabel:
Die Parabel hat ihren Scheitelpunkt im Koordinatenursprung und besitzt bei $t = t_1$ den Wert Q_1. $Q(t) = Q_1\left(\frac{t}{t_1}\right)^2$

b) Die parallele zur t-Achse: $Q(t) = Q_1$

c) Die fallende Gerade. Sie besitzt einen negativen Anstieg und ist um Q_1 nach oben und t_2 nach rechts verschoben:

Ansatz: $Q(t) = n + m(t - t_2)$

$n = Q_1$; $m = \frac{-Q_1 - Q_1}{t_3 - t_2} = -2\frac{Q_1}{t_3 - t_2}$

$$Q(t) = Q_1 - 2\frac{Q_1}{t_3 - t_2}(t - t_2) = Q_1\left(1 - \frac{2(t - t_2)}{t_3 - t_2}\right);$$

d) Die e-Funktion beginnt mit dem Wert $-Q_1$ und fällt dann auf Null. Genau das macht eine e-Funktion, sie ist für das Argument Null gleich eins und fällt mit

steigendem Argument gegen Null. Unsere Funktion ist außerdem um t_3 nach rechts verschoben. $Q(t) = -Q_1 \exp\left(-\frac{t - t_3}{\tau}\right)$

$$\text{Probe: } t = t_3 \rightarrow Q(t_3) = -Q_1; \quad t \rightarrow \infty \rightarrow Q = 0$$

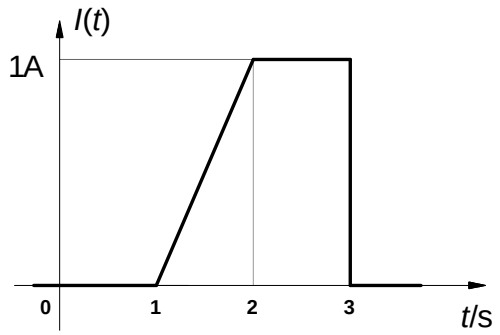
Gesamtdarstellung einschl. Differenziation:

$$Q(t) = \begin{cases} Q_1 \left(\frac{t}{t_1}\right)^2 & \text{für} \quad 0 \le t \le t_1 \\ Q_1 & \text{für} \quad t_1 < t \le t_2 \\ Q_1 \left(1 - \frac{2(t - t_2)}{t_3 - t_2}\right) & \text{für} \quad t_2 < t \le t_3 \\ -Q_1 \exp\left(-\frac{t - t_3}{\tau}\right) & \text{für} \quad t_3 < t < \infty \end{cases}$$

$$I(t) = \begin{cases} 2\frac{Q_1}{t_1}\left(\frac{t}{t_1}\right) = 2 \cdot \mathrm{A} \cdot t/\mathrm{s} & \text{für} \quad 0 \le t \le t_1 \\ 0 & \text{für} \quad t_1 < t \le t_2 \\ \frac{-2}{t_3 - t_2} Q_1 = -1{,}33\,\mathrm{A} & \text{für} \quad t_2 < t \le t_3 \\ \frac{Q_1}{\tau} \exp\left(-\frac{t - t_3}{\tau}\right) = 2 \cdot \mathrm{A} \cdot \exp\left(-\frac{t - 3{,}5\,\mathrm{s}}{0{,}5\,\mathrm{s}}\right) & \text{für} \quad t_3 < t < \infty \end{cases}$$

Strom, Ladung

Gegeben ist der folgende Stromverlauf:



Zu berechnen ist der Ladungsverlauf:

Allgemein gilt: $Q(t) = Q(t = t_0) + \int_{t_0}^{t} I(t')\mathrm{d}t'$

Also muss für jeden Abschnitt die Funktion *I(t)* bekannt sein und dann integriert werden.

Tip: Zunächst die Basisvariante einer jeden Funktion suchen und dann in x- und y Richtung verschieben

e) Die steigende Gerade. Sie besitzt einen positiven Anstieg und ist um 1 s nach

Ansatz: $I(t) = m(t - 1\,\mathrm{s})$

$t = 2\,\mathrm{s};\ I = 1\,\mathrm{A}$

rechts verschoben: $m = \frac{1\,\mathrm{A}}{1\,\mathrm{s}} = 1\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}}$

$I(t) = 1\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}}(t\text{-}1\,\mathrm{s})$

Gesamtdarstellung:

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \le t \le 1\mathrm{s} \\ 1\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}}\left(t - 2\,\mathrm{s}\right) & \text{für} \quad 1\mathrm{s} < t \le 2\mathrm{s} \\ 0 & \text{für} \quad 2\mathrm{s} < t < \infty \end{cases}$$

Nun muss integriert werden, wobei für jeden Bereich als Anfangsladung, die Ladung aus dem vorherigen Bereich gilt.

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \le t \le 1\text{s} \\ 1\frac{\text{A}}{\text{s}}\left(t - 1\text{s}\right) & \text{für} \quad 1\text{s} < t \le 2\text{s} \\ 1\text{A} & \text{für} \quad 2\text{s} < t < 3\text{s} \\ 0 & \text{für} \quad 3\text{s} < t < \infty \end{cases}$$

$0 \le t \le 1\text{s}$: $\quad Q(t = 0) = 1\text{As};\ Q(t) = 1\text{As} + \int_0^1 0\,dt' = 1\text{As};$

$\underline{Q(t)=1\text{As}}$ $\qquad$ $\underline{Q(1\,\text{s})=1\text{As}}$

$1\text{s} < t \le 2\text{s}$: $\quad Q(t = 1\,\text{s}) = 1\text{As};\qquad Q(t) = 1\text{As} + \int_{1\text{s}}^{t} 1\frac{\text{A}}{\text{s}}\left(t' - 1\,\text{s}\right)dt' =$

$$1\text{As} + \left| 1\frac{\text{A}}{\text{s}}\frac{1}{2}\left(t' - 1\,\text{s}\right)^2 \right|_{1s}^{t} =$$

$\underline{Q(t) = 1\text{As} + \frac{\text{A}}{2\text{s}}\left(\left(t - 1\text{s}\right)^2\right)}$ $\qquad$ $\underline{Q(2\text{s})=1{,}5\,\text{As}}$

$2\text{s} < t < 3\text{s}$: $\quad Q(t = 2\,\text{s}) = 1{,}5\text{As};\qquad Q(t) = 1{,}5\text{As} + \int_{2\text{s}}^{t} 1\text{A}\,dt' =$

$$1{,}5\text{As} \quad + 1\text{A} \cdot t'\Big|_{2\text{s}}^{t}$$

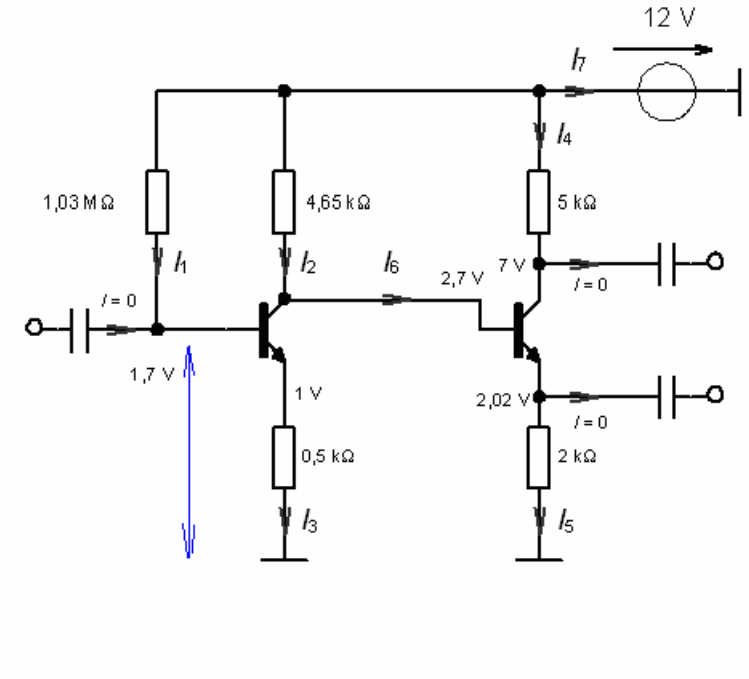
$\underline{Q(t) = 1\text{As} + 1\text{A} \cdot \left(t - 2\text{s}\right)}$ $\quad$ $\underline{Q(3\text{s})=2{,}5\,\text{As}}$

$3\text{s} < t < \infty$: $\quad Q(t = 3\,\text{s}) = 2{,}5\text{As};\qquad Q(t) = 2{,}5\text{As} + \int_{2\text{s}}^{t} 0\,dt' =$

$\underline{Q(t)=2{,}5\,\text{As}}$

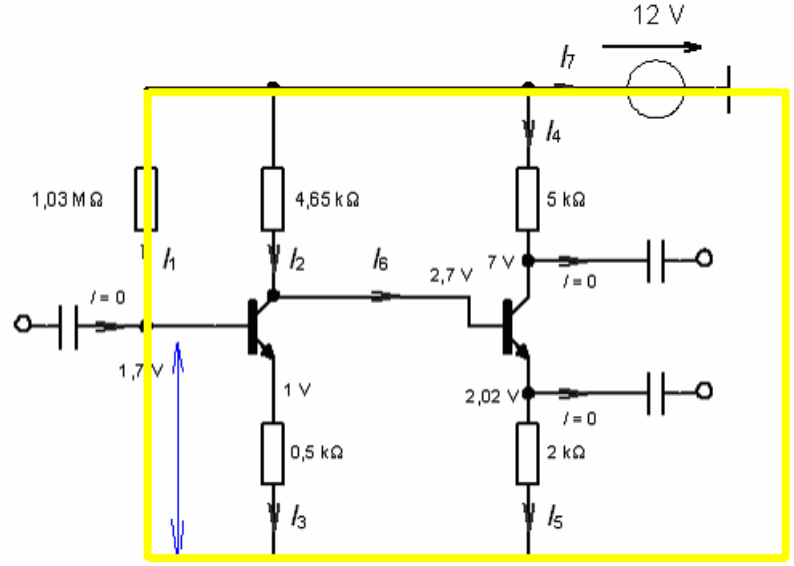
Maschensatz, Knotensatz

Gegeben ist folgende Schaltung:



Alle angegebenen Spannungen werden zwischen dem Messpunkt und Masse gemessen, für die Spannung von 1,7 V angedeutet durch die blaue Linie.

Über die Maschen lassen sich einzelne Spannungen und damit auch Ströme bestimmen. Wir führen das an der gelb markierten Masche durch:



Die Maschenspannungen:

$$I_1 \cdot 1,03\,\mathrm{M\Omega} + 1,7\ \mathrm{V} - 12\ \mathrm{V} = 0$$

$$I_1 = \frac{12\ \mathrm{V} - 1,7\ \mathrm{V}}{1,03\,\mathrm{M\Omega}} = 10\,\mu\mathrm{A}$$

(Mit scholar-terminal kein Problem)

Jetzt die anderen:

$I_2 = \frac{12\text{ V- }2{,}7\text{ V}}{4{,}65\text{k}\Omega} = 2\text{ mA}$ (Die Spannung 2,7 V steht etwas weiter rechts!)

$I_3 = \frac{1\text{ V}}{0{,}5\text{k}\Omega} = 2\text{ mA}$ (Das ist ganz einfach, die Spannung wird direkt über dem Widerstand gemessen)

$I_4 = \frac{12\text{ V-7 V}}{5\text{k}\Omega} = 1\text{ mA}$ (Wie bei I_2)

$I_5 = \frac{2{,}02\text{ V}}{2\text{k}\Omega} = 1{,}01\text{ mA}$ (Wie bei I_3)

Über die Knotensätze kann der Rest bestimmt werden.

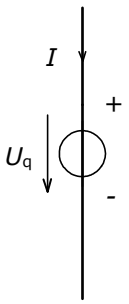
$I_6 = I_2 - I_3 = 10\,\mu\text{A}$

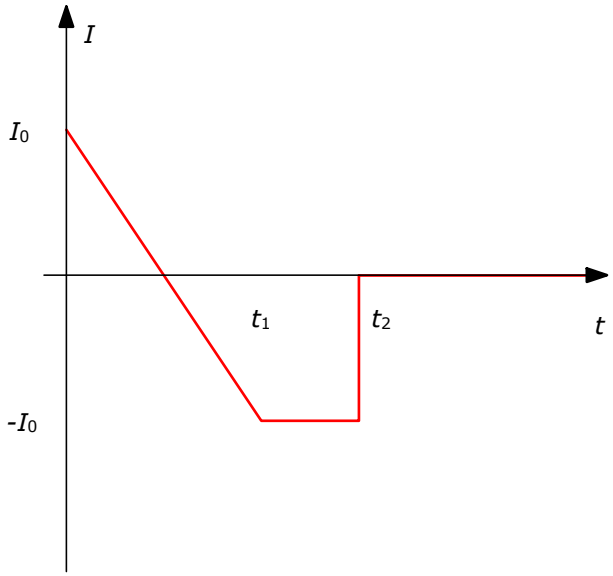
Masche:

$5\text{k}\Omega \cdot I_4 + (7\text{ V - }2{,}7\text{ V}) - 4{,}65\text{k}\Omega \cdot I_2 = 0$

Energie- und Spannungsquelle

Die Polarität der Spannungsquelle folgt aus dem Spannungspfeil!

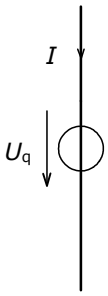


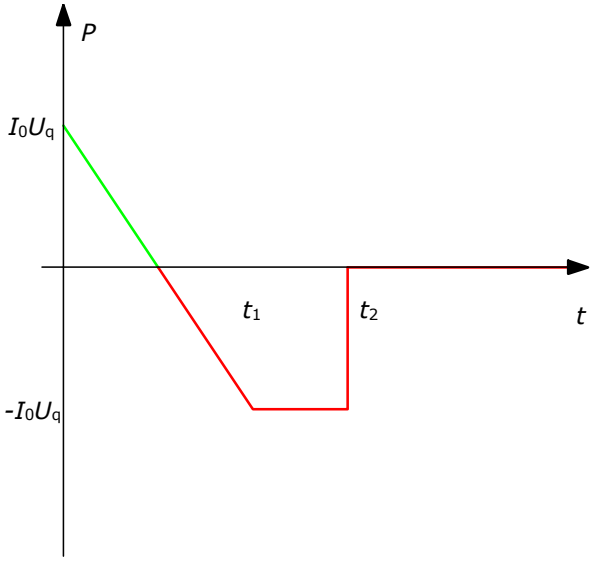


$$I(t) = \begin{cases} I_0\left(1 - \frac{2}{t_1}t\right) & 0 \le t \le t_1 \\ -I_0 & t_1 < t < t_2 \\ 0 & t_2 < t \end{cases}$$

Die Leistung wir über die Beziehung $P = U_q I$ ermittelt.

$$P(t) = \begin{cases} I_0 U_q\left(1 - \frac{2}{t_1}t\right) & 0 \le t \le t_1 \\ -I_0 U_q & t_1 < t < t_2 \\ 0 & t_2 < t \end{cases}$$


I
Uq


P
I0Uq
-I0Uq
t1
t2
t

Die transportierte Energie ergibt sich aus:

$$W(t) = W(t=0) + \int_{t=0}^{t} P(t)\mathrm{d}t \qquad \text{mit } W(t=0) = 0$$

$$W(t) = U_\mathrm{q} \int_{t=0}^{t} I(t)\mathrm{d}t$$

$\underline{0 \le t \le t_1:}$

$$W(t) = W(t=0) + \int_{t=0}^{t} P(t)\mathrm{d}t \qquad \text{mit } W(t=0) = 0$$

$$W(t) = U_\mathrm{q} \int_{t=0}^{t} I(t)\mathrm{d}t$$

$$W(t) = \frac{-I_0 U_\mathrm{q} t_1}{4}\left(1 - \frac{2}{t_1}t\right)^2\Bigg|_0^t = I_0 U_\mathrm{q} t\left(1 - \frac{t}{t_1}\right) \qquad W(t_1) = 0$$

$$W(t) = 2\,\mathrm{A}\cdot 12\,\mathrm{V}\cdot t\left(1 - \frac{t}{60\,\mathrm{min}}\right) = 2\cdot 12\cdot t/\mathrm{min}\left(1 - \frac{t}{60\,\mathrm{min}}\right)\cdot \mathrm{W}\cdot \mathrm{min}$$

$$W(t) = 24\cdot t/\mathrm{min}\left(1 - \frac{t}{60\,\mathrm{min}}\right)\cdot \mathrm{W}\cdot 60\ \mathrm{s} = 24\cdot t/\mathrm{min}\left(1 - \frac{t}{60\,\mathrm{min}}\right)\cdot \mathrm{W}\cdot 60\ \mathrm{s}$$

$$W(t) = 1440\cdot t/\mathrm{min}\left(1 - \frac{t}{60\,\mathrm{min}}\right)\cdot \mathrm{Ws}$$

$$\underline{\underline{W(t)/\mathrm{Ws} = 1440\cdot t/\mathrm{min}\left(1 - \frac{t}{60\,\mathrm{min}}\right)}}$$

$\underline{t_1 < t < t_2:}$

$$W(t) = W(t_1) - I_0 U_\mathrm{q}\int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t = 0 - I_0 U_\mathrm{q}\left(t - t_1\right) \qquad W(t_2) = -I_0 U_\mathrm{q}\left(t_2 - t_1\right)$$

$$W(t) = -24\left(t/\mathrm{min} - t_1/\mathrm{min}\right)\mathrm{W}\cdot \mathrm{min} = -24\left(t/\mathrm{min} - 60\right)\mathrm{W}\cdot 60\,\mathrm{s}$$

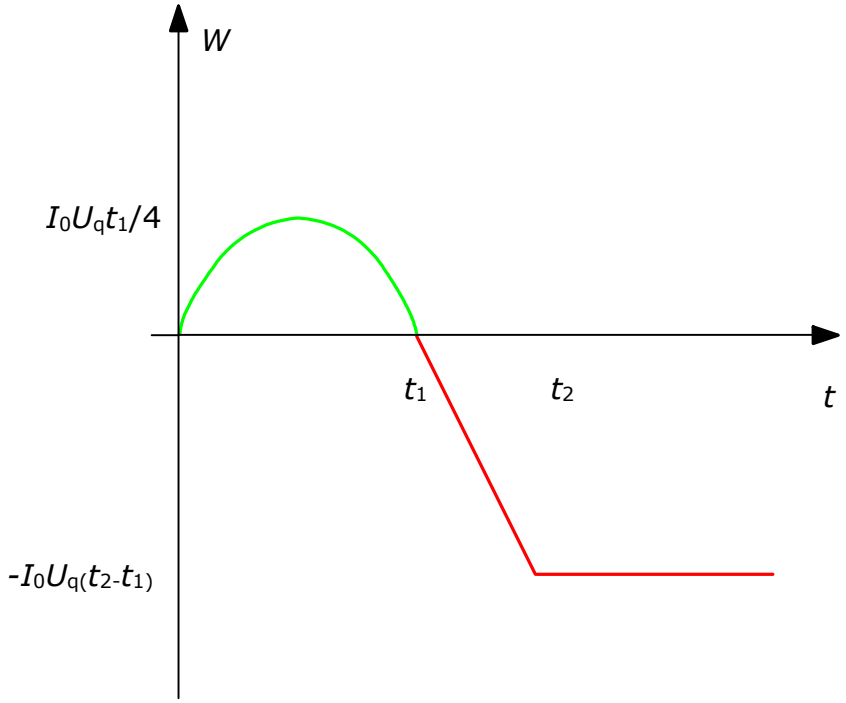
$$\underline{\underline{W(t)/\mathrm{Ws} = -1440\left(t/\mathrm{min} - 60\right)}}$$

$$W(t_2) = 43200\,\mathrm{Ws}$$

$\underline{t_2 < t:}$

$$P = 0 \quad \rightarrow \qquad -I_0 U_\mathrm{q}\left(t_2 - t_1\right)$$

Nichtmaßstäbliche Zeichnung:

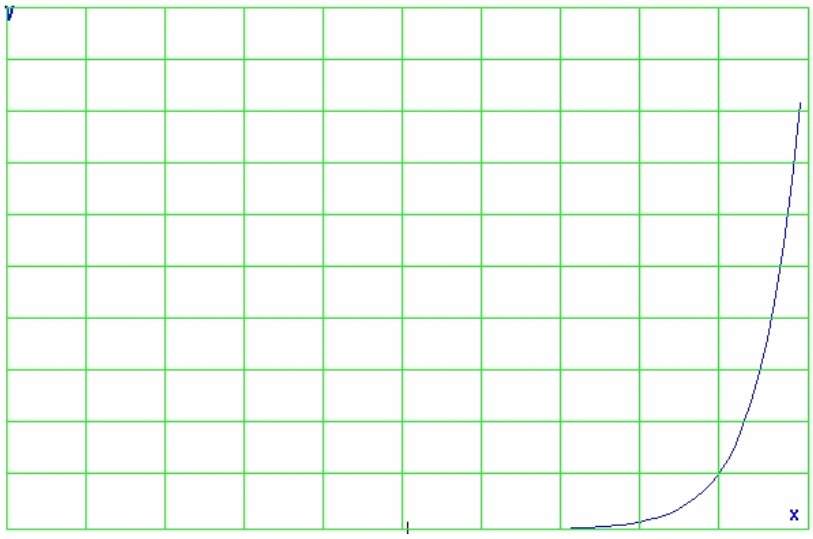


Kennlinie einer Diode

Für alle Betrachtungen gilt m = 1!

U/V	I/mA
0	0
0,52	1,1
0,56	3
0,60	8,2
0,64	22,2
0,68	60,4
0,70	99,6
0,72	164,1
0,74	270,6

a) Kennlinie der Diode



b)

U/V	0	0,35	0,7	- 7
I / mA	0	0,016	99,6	$- 2{,}5\ 10^{-6}$

Eventuell noch Zwischenwerte angeben.

c) $I \approx I_S e^{\frac{U}{mU_T}}$, $\frac{U}{mU_T} = \ln(\frac{I}{I_S})$, $U = mU_T \ln(\frac{I}{I_S})$ $\Rightarrow$ ***U* = 0,600 V** .

d) Allgemein gilt mit der für den Durchlaßbereich gültigen Näherungsbeziehung:

$$U = mU_T \ln(\frac{I}{I_S}) \quad ,$$

$$\Rightarrow \qquad U_1 = mU_T \ln(\frac{I_1}{I_S}) \ , \quad U_2 = mU_T \ln(\frac{I_2}{I_S}) \qquad , \qquad U_2 - U_1 = mU_T \ln(\frac{I_2}{I_1}).$$

$$\frac{I_2}{I_1} = 2 \quad \Rightarrow \quad U_2 = U_1 + mU_T \ln 2 \ \ , U_2 = 0{,}600\,\text{V} + 40\ \text{mV} \ln 2 = \mathbf{0{,}6277\ V}.$$

Von gewissem technischen Interesse ist noch der Fall :

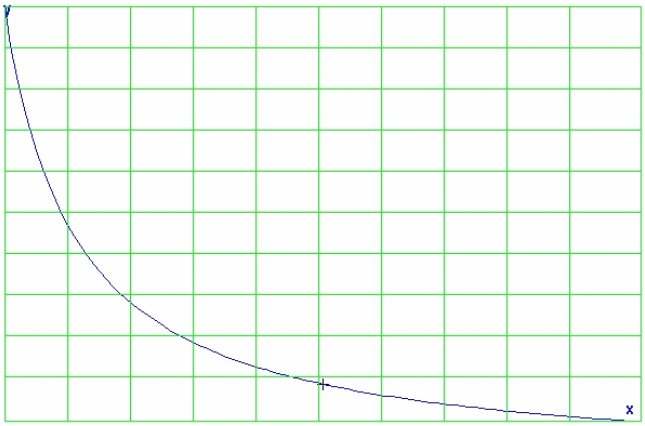
$$\frac{I_2}{I_1} = 10 \quad \Rightarrow \quad U_2 - U_1 = mU_T \ln 10 \approx 2{,}3\, mU_T \quad .$$

Differenzieller Widerstand einer Diode

a)

$$I = I_S\left(\exp\left(\frac{U}{U_T}\right) - 1\right) \rightarrow \qquad U = U_T \ln\left(\frac{I}{I_S} + 1\right)$$

$$r = \frac{dU}{dI} = \frac{U_T}{I_S}\frac{1}{\frac{I}{I_S}+1} = \frac{U_T}{I_S + I}$$



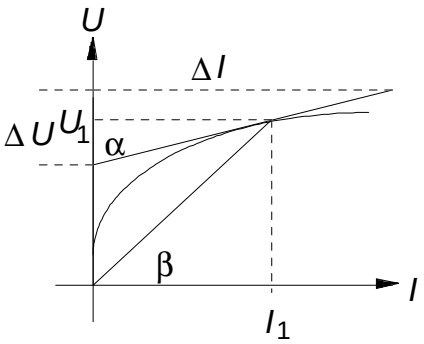
b)

I = 1 mA: r = 40 Ω , I = 0,05 mA: r = 800 Ω.

Hinweise:

1. Für I = 0 folgt ,

   Zahlenwert für U_T = 40 mV und I_S = 2,5 nA: $r(0)$ = 16 MΩ.



2.

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1} \quad , \quad \tan\beta \quad \frac{U_1 / \mathrm{V}}{I_1 / \mathrm{A}} = R_1 / \Omega$$

$$r = (\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}I})_1 , \ \tan\alpha \quad (\frac{\mathrm{d}U / \mathrm{V}}{\mathrm{d}I / \mathrm{A}})_1 = (\frac{\Delta U / \mathrm{V}}{\Delta I / \mathrm{A}})_1 = r \ / \Omega$$

Arbeitspunkt einer Diodenschaltung

a) Allgemein mit dem MS: $U_q = IR + U_D(I) \Rightarrow I = \frac{U_q - U_D(I)}{R} > 0$ für $U_q > U_D(I)$,

Fall 1: $U_q > U_D = U_F =$ 0,7 V = konst. $\Rightarrow$ Diode leitet für U_{q1} und U_{q2}

Fall 2: $U_q > U_D = U_D(I) >$ 0,5 V $\Rightarrow$ Diode leitet für U_{q1} und U_{q2}.

b) Fall 1: $U = U_F = U_{q1} - IR \Rightarrow$ ***U* = 0,7 V**, ***I* = 43 mA**,

Fall 2: $U = U_{q1} - I_S R \exp(\frac{U}{mU_T})$,

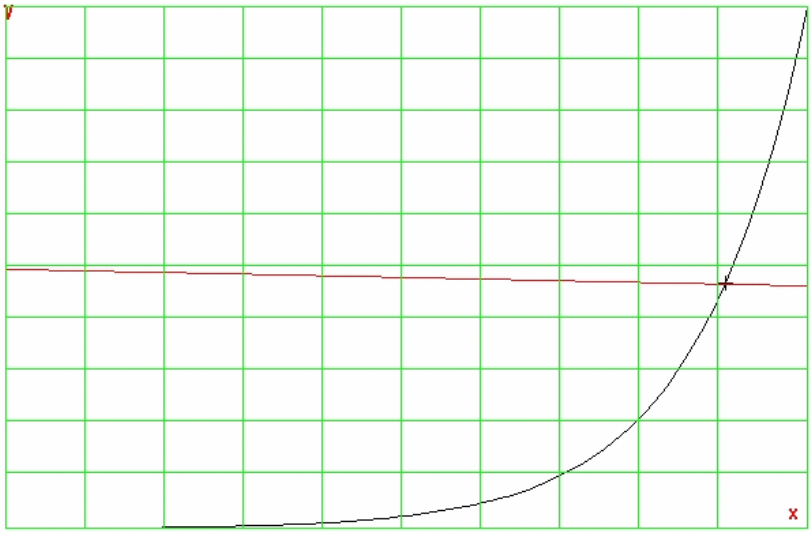
zahlenmäßige Auswertung für I_S = 2,5 10^{-9}A, mU_T = 40 mV, R = 100 Ω:

$$U = 5\,\text{V} - 2{,}5 \cdot 10^{-7}\,\text{V} \cdot \exp(\frac{U}{40\,\text{mV}}) \Rightarrow \quad f(U) = (U/\text{V}) + 2{,}5 \cdot 10^{-7} \cdot \exp(25 \cdot (U/\text{V})) = 5$$

Wert	U/V	f(U)
1	0.660	4,32
2	0,665	4,815
3	0,668	5,141
4	0,670	5,37

Lineare Interpolation zwischen den Werten 2 und 3 liefert ***U* = 0,6667V**, ***I* = 43,3 mA**.

Der Arbeitspunkt ergibt sich aus dem Schnittpunkt der beiden Kennlinien:



rot: Kennlinie des aktiven ZP

schwarz: Diodenkennlinie

Bei Variation von U_e ergeben sich folgende, grafisch ermittelte, Ergebnisse:

U_q	5 V	1 V	0,3 V	-3 V
Ideal	0,7 V / 43 mA	0,7 V /3 mA	0,3 V / 0 mA	-3 V / 0 mA
Real	0,66 V / 43 mA	0,57 V / 4,3 mA	0,3 V / 4,5 µA	-3 V / 0 mA

.

Kennlinie einer Glühlampe

Gegeben ist die Kennlinie der Lampe mit: $U = aI + bI^2$.
Die Lampe besitzt einen Kaltwiderstand von 100 Ω.
Bei 230 V verbraucht sie eine Leistung von 40 W.

Ansatz:

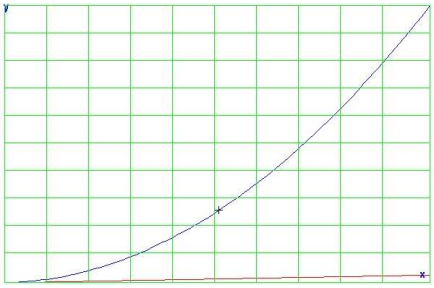
- Der Strom im „Wachzustand" der Lampe lässt sich leicht aus der Leistung bei Nennspannung berechnen.
- Der Kaltwiderstand ist der Widerstand bei der Spannung Null. Dieser Widerstand kann praktisch nicht gemessen werden. Man findet ihn durch folgende Überlegung. Die Strom/Spannungskennlinie eines ohmschen Widerstandes von 100 Ω besitzt den entsprechenden Anstieg. Dieser ist konstant. Bei 0 V entspricht der Anstieg der Strom/Spannungskennlinie der Lampe genau diesem Wert. Man muss also die erste Ableitung der Kurve bilden und für $I = 0$ den differenziellen Widerstand bilden.

$$U = aI + bI^2$$

$$r = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}I} = a + 2bI$$

$$r(I = 0) = a = 100\,\Omega$$

$$\underline{a = R_\mathrm{K} = 100\,\Omega}$$



Blau: KL Lampe
Rot: Kennlinie Widerstand 100 Ω

Für den Betrieb bei Nennspannung ermitteln wir den Strom $I_\mathrm{N} = \frac{P}{U_\mathrm{N}} = 0{,}174\,\mathrm{A}$.

Die Konstante b bestimmen wird aus den Nenngrößen beim Betrieb der Lampe.
U(I)-Kennlinie:

$$U_\mathrm{N} = R_\mathrm{K} I_\mathrm{N} + bI_N^2$$

$$b = \frac{U_\mathrm{N} - R_\mathrm{K} I_\mathrm{N}}{I_N^2} = 7029\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}^2}$$

$$U = 100\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}\,I + 7029\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}^2}\,I^2 \;\Big|:\mathrm{V}$$

$$\underline{U/\mathrm{V} = 100\,(I/\mathrm{A}) + 7029\,(I/\mathrm{A})^2}$$

Die *I(U)*-Kennlinie lässt sich aus der quadratischen Bestimmungsgleichung für I herleiten, wobei nur die positive Lösung in Frage kommt!

$$U = R_K I + b I_N^2$$

$$I^2 + \frac{R_K I_N}{b} - \frac{U_N}{b} = 0$$

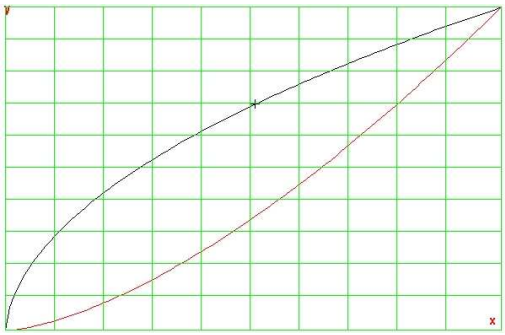
$$I = -\frac{R_K}{2b} + \sqrt{\left(\frac{R_K}{2b}\right)^2 + \frac{U}{b}} = -7{,}11\,\mathrm{mA} + \sqrt{50{,}6\,(\mathrm{mA})^2 + \frac{U}{b}}$$

$$I/\mathrm{mA} = -7{,}11 + \sqrt{50{,}6 + 142\,U/\mathrm{V}}$$

Die Leistung P:
Schwarz: $I(U)$-KL
Rot: Leistung P

$$\underline{I = -\frac{R_K}{2b} + \sqrt{\left(\frac{R_K}{2b}\right)^2 + \frac{U}{b}}}$$

$$\underline{P = UI = U\left(-\frac{R_K}{2b} + \sqrt{\left(\frac{R_K}{2b}\right)^2 + \frac{U}{b}}\right)}$$



$P(U{=}207\ \mathrm{V}) = 34{,}1\ \mathrm{W}$
$P(U{=}253\ \mathrm{V}) = 46{,}2\ \mathrm{W}$

Temperaturabhängigkeit verschiedener Widerstände

a) Bestimmung der Konstanten aus den Werten für T_0 = 293 K und R_0 = 100 Ω.

Metallwiderstand:

$$R(T) = R_M\left(\frac{T}{\theta} - a\right) \quad \rightarrow \quad \underline{R_M = \frac{R(T_0)}{\left(\frac{T_0}{\theta} - a\right)} = 137\,\Omega}$$

Heißleiter:

$$R(T) = R_H e^{\frac{b}{T}} \quad \rightarrow \quad \underline{R_H = \frac{R(T_0)}{e^{\frac{b}{T_0}}} = 3{,}58\,\mathrm{m}\Omega}$$

Kaltleiter:

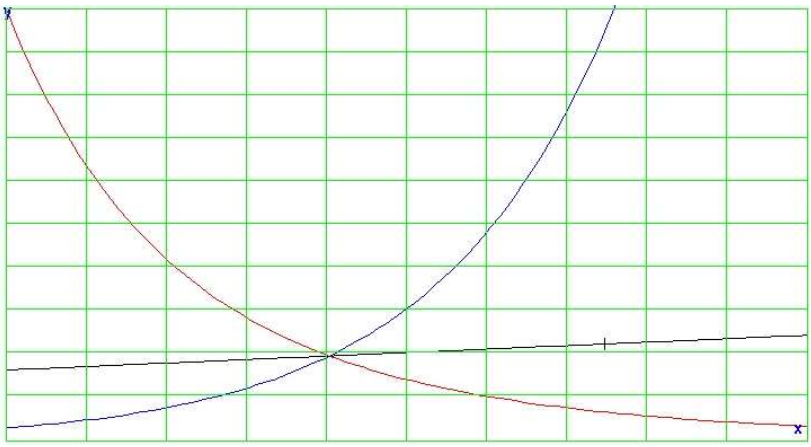
$$R(T) = R_K e^{cT}$$

$$\frac{R(T + 100\mathrm{K})}{R(T)} = 100 = \frac{e^{c(T+100\mathrm{K})}}{e^{cT}} = e^{c100\mathrm{K}}$$

$$\underline{c = \frac{1}{100\mathrm{K}} \ln 100 = 0{,}046\,\frac{1}{\mathrm{K}}}$$

$$\underline{R_K = \frac{R(T_0)}{e^{cT_0}} = 138\,\mu\Omega}$$

b) Kennlinien:
Schwarz: Metallwiderstand
Rot: Heißleiter
Blau: Kaltleiter



c) Bestimmung des Temperaturkoeffizienten α.
In der Umgebung der Temperatur T_0 ändert sich der Widerstand ungefähr mit der ersten Ableitung der Kennlinie nach der Temperatur:

$$R(T_0 + \Delta T) = R(T_0 + \Delta T) + \left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T}\right|_{T=T_0} \cdot \Delta T$$

Wir müssen also die erste Ableitung bilden, und die Gleichung dann in die Form $R(T_0 + \Delta T) = R(T_0)\left(1 + \alpha\Delta T\right)$ bringen.

Metallwiderstand:

$$R(T) = R_\mathrm{M}\left(\frac{T}{\theta} - a\right)$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}R(T)}{\mathrm{dT}}\right|_{T=T_0} = \frac{R_\mathrm{M}}{\theta}$$

$$R(T_0 + \Delta T) = R(T_0) + \frac{R_\mathrm{M}}{\theta}\Delta T$$

$$R_\mathrm{M} = \frac{R(T_0)}{\left(\frac{T_0}{\theta} - a\right)}$$

$$R(T_0 + \Delta T) = R(T_0) + \frac{R(T_0)}{\left(\frac{T_0}{\theta} - a\right)\theta}\Delta T = R(T_0)\left(1 + \frac{1}{\left(T_0 - a\theta\right)}\Delta T\right)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\alpha = \frac{1}{\left(T_0 - a\theta\right)}$$

Heißleiter:

$$R(T) = R_\mathrm{H}\mathrm{e}^{\frac{b}{T}}$$

$$R(T_0) = R_\mathrm{H}\mathrm{e}^{\frac{b}{T_0}}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}R(T)}{\mathrm{dT}}\right|_{T=T_0} = -R_\mathrm{H}\frac{b}{T_0^{\,2}}\mathrm{e}^{\frac{b}{T_0}}$$

$$R(T_0 + \Delta T) = R(T_0) - R_\mathrm{H}\frac{b}{T_0^{\,2}}\mathrm{e}^{\frac{b}{T_0}} \cdot \Delta T = R(T_0) - R(T_0)\frac{b}{T_0^{\,2}} \cdot \Delta T$$

$$R(T_0 + \Delta T) = R(T_0)\left(1 - \frac{b}{T_0^{\,2}} \cdot \Delta T\right)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\underline{\alpha = -\frac{b}{T_0^{\,2}}}$$

Kaltleiter:

$$R(T) = R_K e^{cT}$$

$$R(T_0) = R_K e^{cT_0}$$

$$\left.\frac{dR(T)}{dT}\right|_{T=T_0} = R_K c \cdot e^{cT_0}$$

$$R(T_0 + \Delta T) = R(T_0) + R_K c \cdot e^{cT_0} \cdot \Delta T = R(T_0) + R(T_0) \cdot c \cdot \Delta T$$

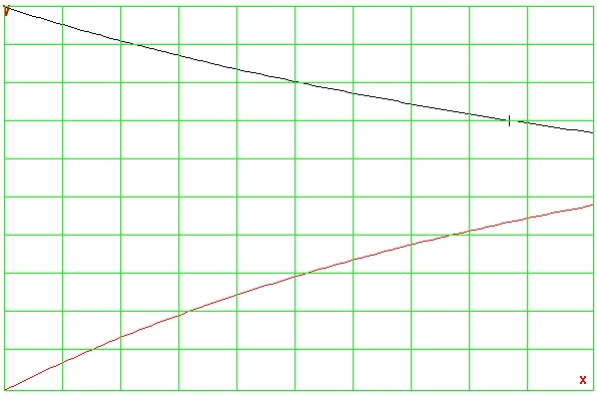
$$R(T_0 + \Delta T) = R(T_0)\left(1 + c \cdot \Delta T\right)$$

Koeffizientenvergleich:

$$\underline{\alpha = c}$$

Schlussfolgerung: Beim Metallwiderstand und beim Heißleiter hängt α von der Bezugtemperatur ab.

Schwarz: Metallwiderstand
Rot: Heißleiter



Zusammenschaltung von Zweipolen

Durch den Zweipol AC fließt der Strom I, in den beiden Parallelzweigen aus Symmetriegründen $I/2$.

Die Spannung über dem Zweipol AC beträgt demnach: $U_{AC} = Z(I)$

Die Spannung über dem Zweig BC: $U_{BC} = 2 \cdot Z(\frac{I}{2})$

Damit lassen sich alle gesuchten Spannungen darstellen:

$$U_{BC} = 2 \cdot Z(\frac{I}{2})$$

$$U_{AC} = U_{BC} + Z(I) = 2 \cdot Z(\frac{I}{2}) + Z(I)$$

Der Faktor k:

$$k = \frac{2 \cdot Z(\frac{I}{2})}{2 \cdot Z(\frac{I}{2}) + Z(I)}$$

Widerstände $U = RI$:

$$U_{BC} = 2 \cdot R\frac{I}{2} = RI = 5\,\mathrm{V}$$

$$U_{AC} = U_{BC} + RI = 2 \cdot RI = 10\,\mathrm{V}$$

$$k = \frac{1}{2}$$

Glühlampen $U = aI + bI^2$

$$a = 2\,\Omega, b = 20\mathrm{V/A}^2$$

$$I = 0,5\,\mathrm{A}$$

$$U_{BC} = 2 \cdot \left(a\frac{I}{2} + b\frac{I^2}{4}\right) = aI + \frac{b}{2}I^2 = \quad 3,5\ \mathrm{V}$$

$$U_{AC} = 2 \cdot \left(a\frac{I}{2} + b\frac{I^2}{4}\right) + aI + bI^2 = 2aI + \frac{3}{2}bI^2 = 9,5\ \mathrm{V}$$

$$k = \frac{aI + \frac{b}{2}I^2}{2aI + \frac{3}{2}bI^2} = 0,36$$

Dioden $I = I_S\left(e^{\frac{U}{UT}} - 1\right) \approx I_S e^{\frac{U}{UT}}$:

$$U = U_T \ln\frac{I}{I_S}$$

$U_T = 100\,\text{mV}, \quad Is = 35\,\text{pA}$

$I = 20\,\text{mA}$

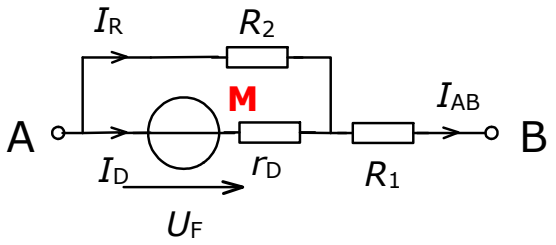
$$U_{BC} = 2 \cdot U_T \ln\frac{I}{2I_S} = 2 \cdot U_T\left(\ln\frac{I}{Is} - \ln 2\right) = \quad 3{,}894\ \text{V}$$

$$U_{AC} = U_T\left(3\ln\frac{I}{Is} - 2\ln 2\right) = \quad 5{,}91\ \text{V}$$

$$k = \frac{2\left(\ln\frac{I}{Is} - \ln 2\right)}{\left(3\ln\frac{I}{Is} - 2\ln 2\right)} = \quad 0{,}66$$

Diodenersatzschaltung

Ersatzschaltung:



Wir analysieren die Schaltung zunächst qualitativ. Liegt an der Diode nicht mindestens die Spannung U_F, zu sperrt sie und der gesamt Strom fließt durch die Widerstände R_1 und R_2. Die Diode leitet gerade noch nicht wenn, über dem Widerstand R_2 die Spannung U_F abfällt. Wir haben einen Spannungsteiler:

$$U_F = U_{AB} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\underline{U_{AB} = U_F \frac{R1+R2}{R2} = 0{,}715\,\mathrm{V}}$$

Zur Berechnung der Kennlinie benutzen wir den Knoten:

$$I_R = I_{AB} - I_D$$

und die beiden Maschen:

$$I_R R_2 = U_F + I_D r_D$$

$$U_{AB} = U_F + I_D r_D + I_{AB} R_1$$

Nach Einsetzen der Knotengleichung in die Gleichung der roten Masche:

$$I_{AB} R_2 - I_D R_2 = U_F + I_D r_D$$

$$I_D = \frac{I_{AB} R_2 - U_F}{R_2 - r_D}$$

$$U_{AB} = U_F + I_{AB} R_1 + I_{AB} \frac{R_2 r_D}{R_2 + r_D} - U_F \frac{r_D}{r_D + R_2}$$

$$I_{AB} = \frac{U_{AB} - U_F + U_F \frac{r_D}{r_D + R_2}}{R_1 + \frac{R_2 r_D}{R_2 + r_D}} = \frac{U_{AB}}{R_1 + R_2 \,||\, r_D} + UF \frac{\frac{r_D}{R_2 + r_D}}{R_1 + R_2 \,||\, r_D}$$

$$I_{AB}/\mathrm{mA} = 18{,}19\, U/\mathrm{V} - 11{,}7 = 8{,}19\left[U/\mathrm{V} - 0{,}643\right]$$

Spannungsteiler mit konstantem Laststrom

Wir verwenden den Überlagerungssatz und bauen mit Strom- und Spannungsteiler die einzelnen Anteile zusammen.

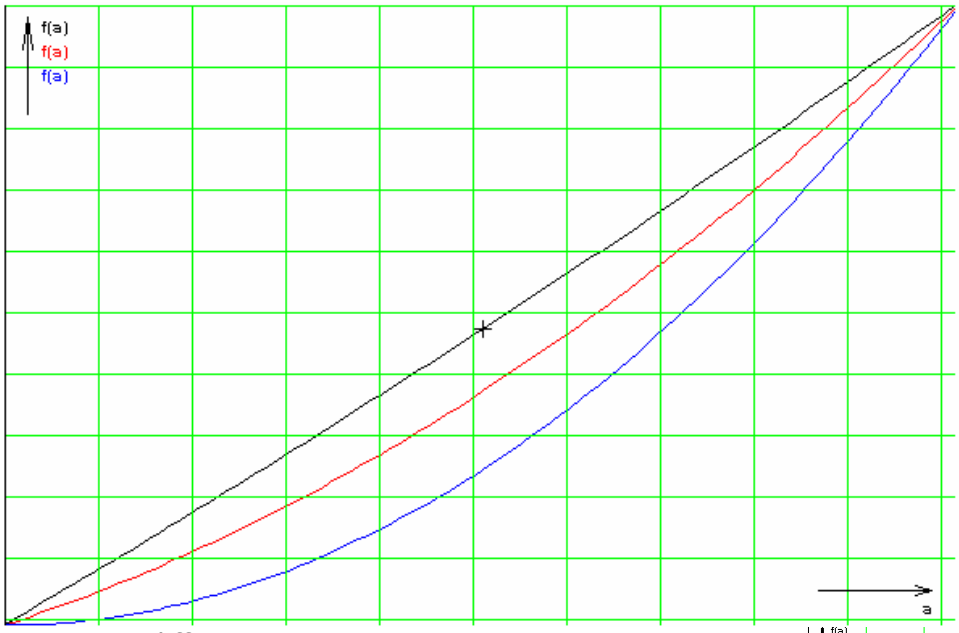
Anteil der Spannungsquelle: $U_1 = U_q \dfrac{aR}{ar + (1-a)R} = U_q \dfrac{aR}{ar + R - aR} = aU_q$

Anteil der Stromquelle: $U_2 = -Iar \,||\, (1-a)R = I \dfrac{ar(1-a)R}{aR + (1-a)R} = -Ia(1-a)R$

Gesamt: $\underline{U = aUq - IRa(1-a)}$

Normiert: $\dfrac{U}{U_q} = a - \dfrac{IRa}{U_q}(1-a) \qquad \dfrac{U_q}{R} = I_T$

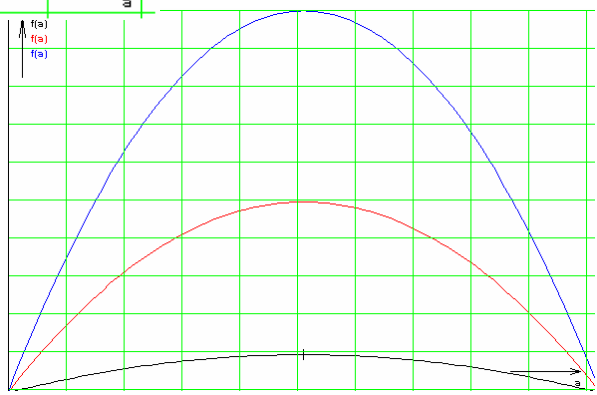
$$\underline{\frac{U}{U_q} = a - \frac{Ia}{I_T}(1-a) = a\left(1 - \frac{I}{I_T}(1-a)\right)}$$



Spannungsdifferenz:

$$\Delta U = aUq - \big(aUq - IRa(1-a)\big) = IRa(1-a)$$

$$\underline{\frac{\Delta U}{U_q} = \frac{Ia}{I_T}(1-a)}$$



Teilströme in den Teilwiderständen:

Anteil der Spannungsquelle: $I_1 = I_2 = \frac{U_q}{R}$

Anteil der Laststromquelle (unterer Teil): $I_{2I} = -I \frac{(1-a)R}{(1-a)R + aR} = -I\left(1-a\right)$

Anteil der Laststromquelle (oberer Teil): $I_{1I} = I \frac{aR}{(1-a)R + aR} = Ia$

Gesamtstrom (unterer Teil): $I_2 = -I\left(1-a\right) + \frac{U_q}{R}$

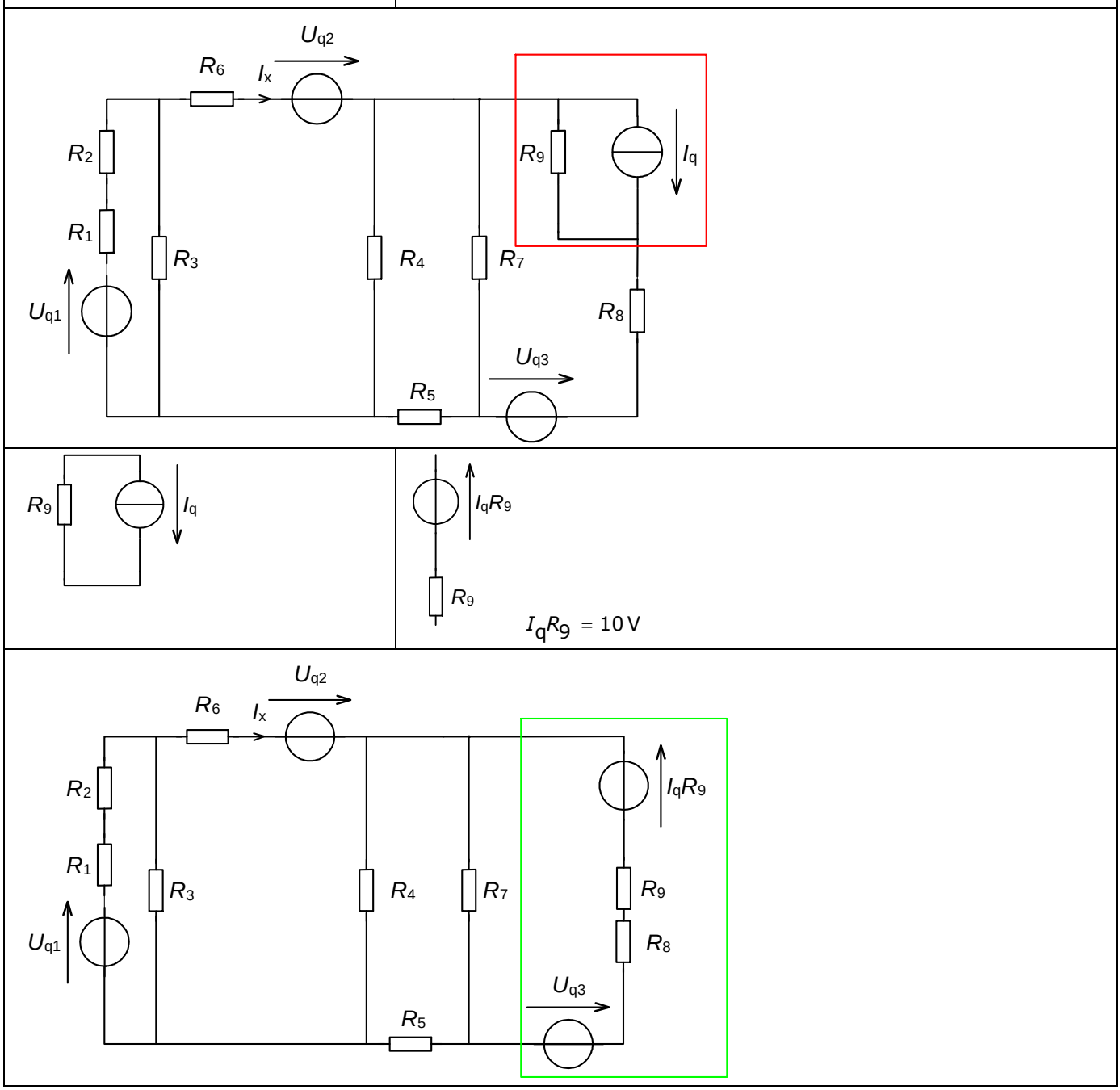
$$\underline{\frac{I_2}{I_T} = 1 - \frac{I_1}{I_T}\left(1-a\right)}$$

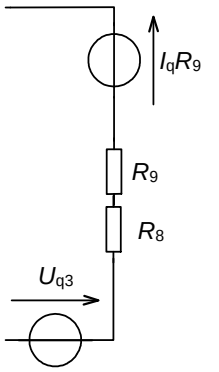
Gesamtstrom (oberer Teil): $I_1 = Ia + \frac{U_q}{R}$

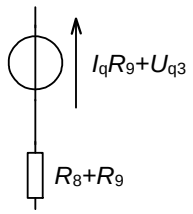
$$\underline{\frac{I_1}{I_T} = 1 + \frac{I_1}{I_T}a}$$

Schaltungsberechnung, Zweipolersatzschaltung

Berechnen Sie den Strom Ix durch R_6, indem Sie die Schaltung in einzelne Zweipole zerlegen, und so eine einzige Masche entsteht.

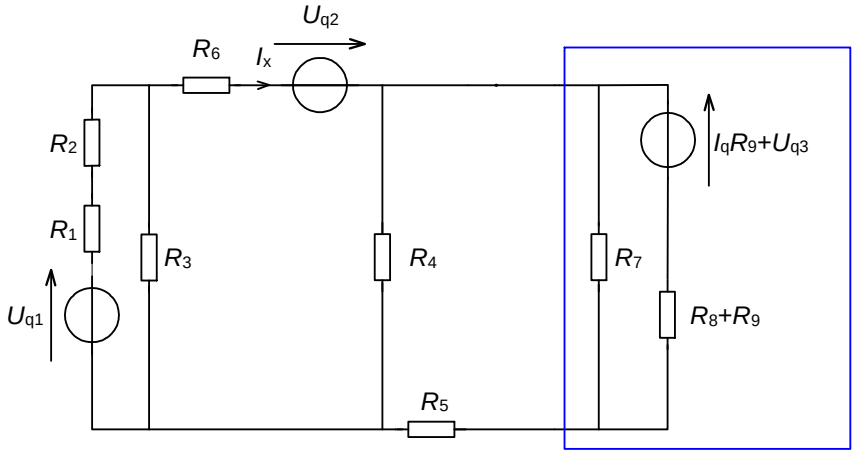


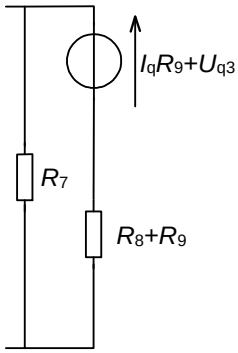


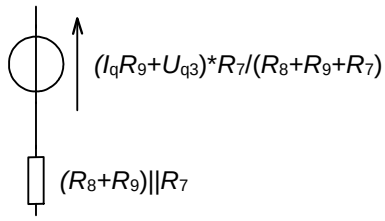


$R_8 + R_9 = 20\,\Omega$

$I_qR_9 + U_{q3} = 20\,\text{V}$

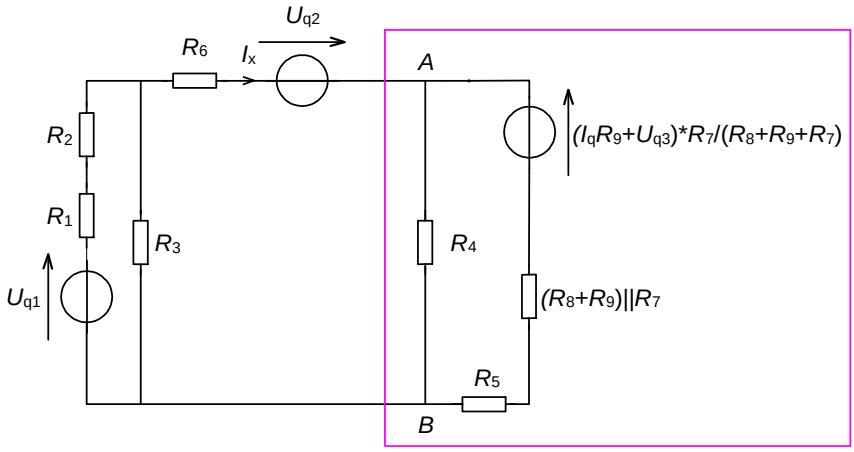


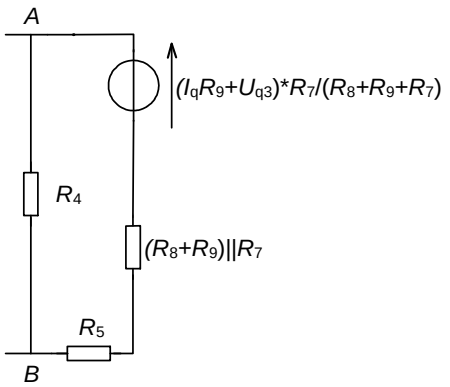


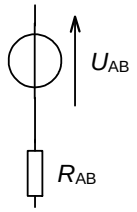


$$U_1 = (I_qR_9 + U_{q3})\frac{R_7}{(R_8 + R_9 + R_7)} = 6{,}667\ \text{V}$$

$$R_1 = (R_8 + R_9) \mid R_7 = 6{,}667\ \Omega$$

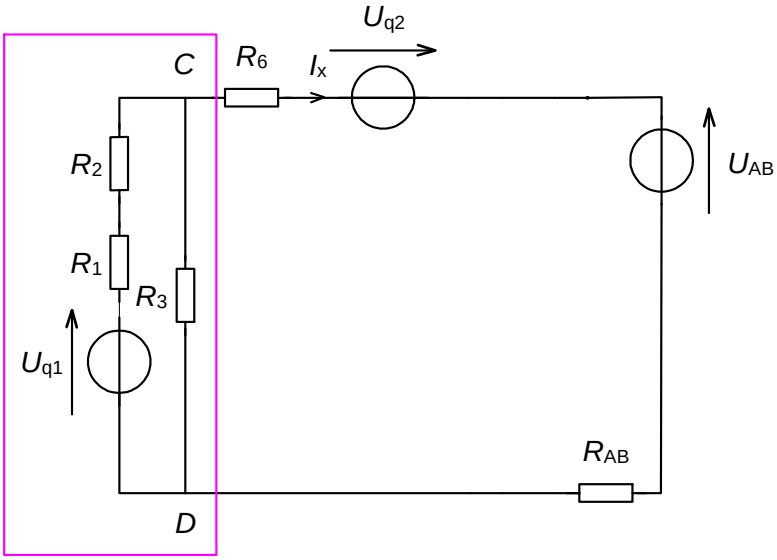


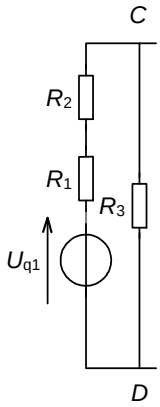


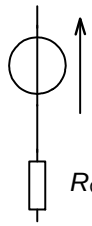


$$U_{AB} = (I_q R_9 + U_{q3}) \frac{R_7}{(R_8 + R_9 + R_7)} \frac{R_4}{R_4 + R_5 + (R_8 + R_9) \,||\, R_7} = 2{,}5 \text{ V}$$

$$R_{AB} = \left[(R_8 + R_9) \,||\, R_7 + R_5\right] \,||\, R_4 = 6{,}25\ \Omega$$







$U_{CD}=U_{q1}R_3/(R_1+R_2+R_3)$

$R_{CD}=(R_1+R_2)||R_3$

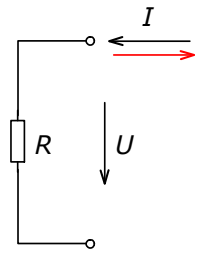
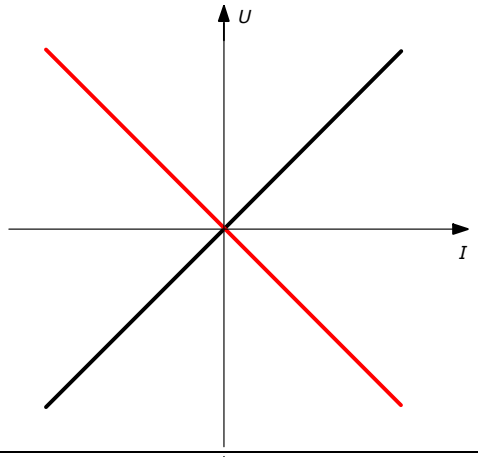
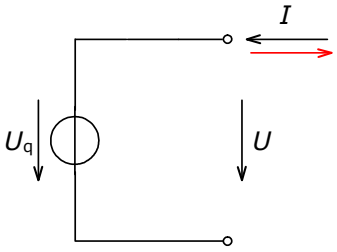
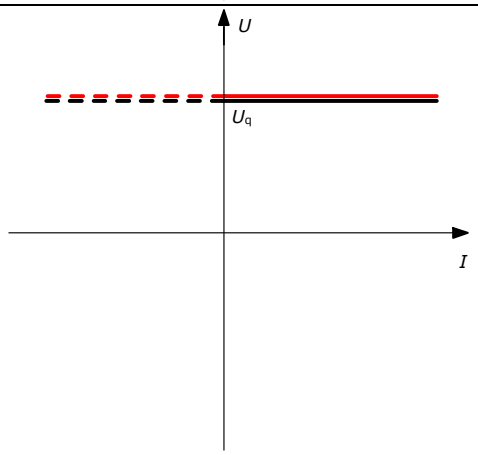
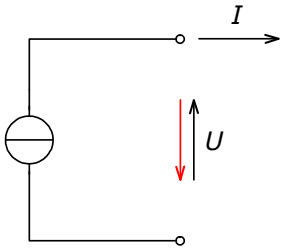
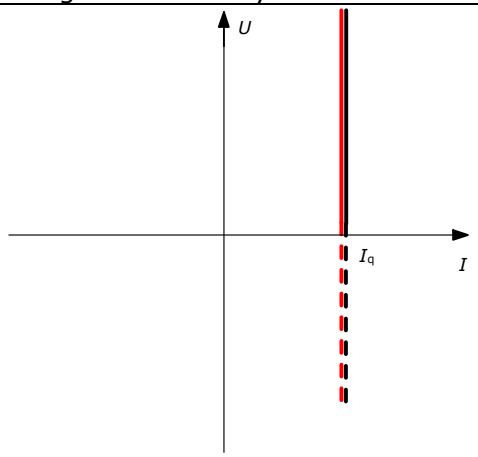
$$U_{CD} = U_{q1} \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 3{,}333 \text{ V}$$

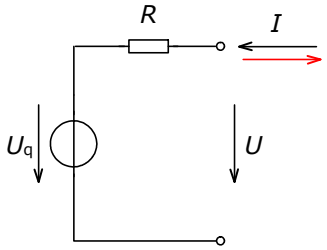
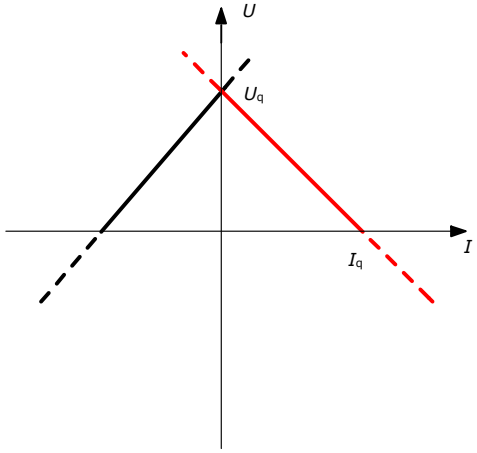
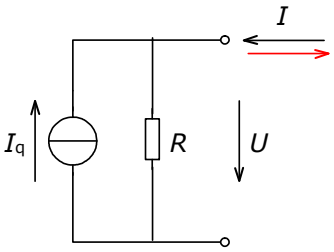
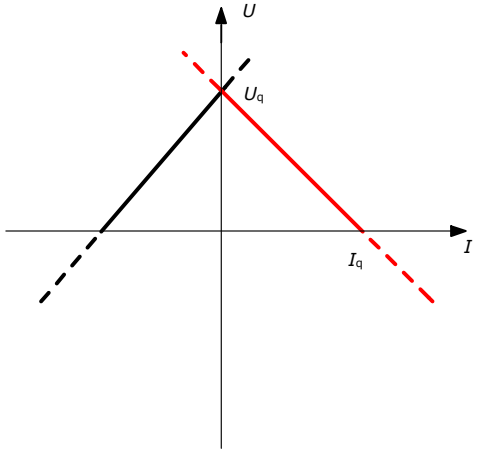
$$R_{CD} = R_3 \,||\, (R_1 + R_2) = 6{,}667\ \Omega$$

Erzeuger und Verbraucherbepfeilung

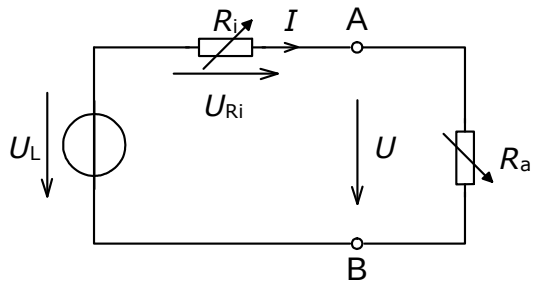
Für alle gewählten Quellen stellen wir die Gleichung für den Zusammenhang zwischen U und I unter Beachtung der Richtung von I bzw. U auf. Dann zeichnen wir dafür die Diagramme:

Schwarz : Verbrauchersystem
Rot: Erzeugersystem

Zweipol		
Widerstand 	$U = IR$ $U = -IR$	
Spannungsquelle ideal, hier gewählt: $U_q > 0$ 	$U = U_q$ $U = U_q$	 Schwarz gestrichelt: Phys. Erzeuger Rot gestrichelt: Phys. Verbraucher
Stromquelle ideal hier gewählt: $I_q > 0$ 	$I = I_q$ $I = I_q$	 Schwarz gestrichelt: Phys. Erzeuger Rot gestrichelt: Phys. Verbraucher

Spannungsquelle Real, hier gewählt: $U_q > 0$  	$U = U_q + IR$ $U = U_q - IR$ $I_q = \frac{U_q}{R}$	 Schwarz gestrichelt: Phys. Erzeuger Rot gestrichelt: Phys. Verbraucher
Stromquelle Real, hier gewählt: $I_q > 0$  	$U = I_qR + IR$ $U = I_qR - IR$ $U_q = I_qR$	 Schwarz gestrichelt: Phys. Erzeuger Rot gestrichelt: Phys. Verbraucher

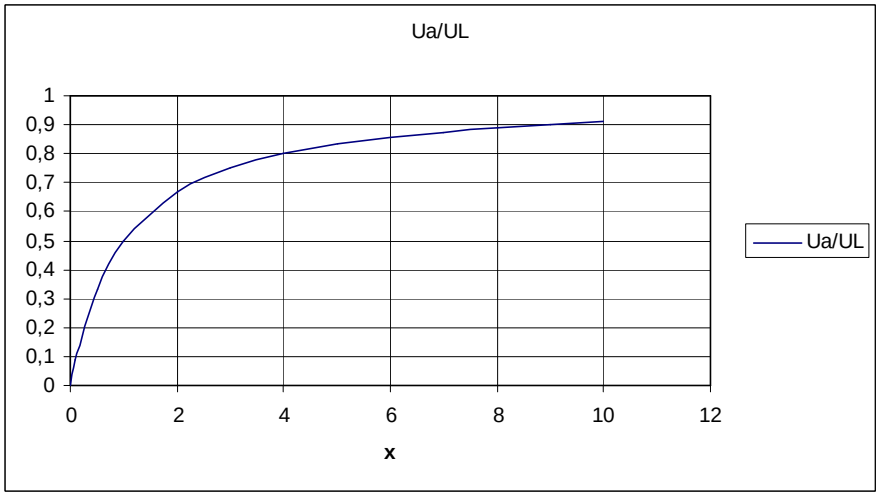
Leistungsbilanz eines linearen Zweipols mit angeschlossenem Widerstand



1) Für die gezeigte Schaltung stellen wir die Gleichungen für Spannung Strom und Leistung in Abhängigkeit von R_a auf.
Es ist dabei zu beachten, dass der Innenwiderstand R_i konstant ist, weil sich sonst I_k und P_0 ändern!!!!

Spannung *U*:

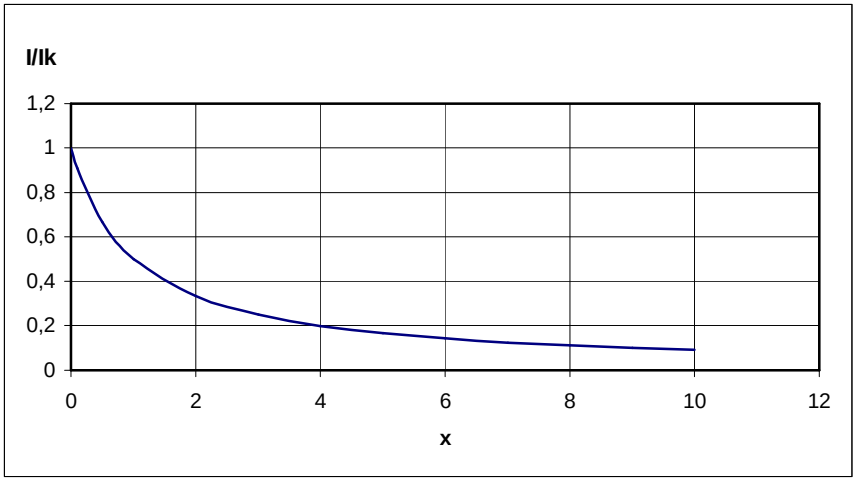
$$U = U_L \frac{R_a}{R_i + R_a} \rightarrow \quad \frac{U}{U_L} = \frac{R_a}{R_i + R_a} \rightarrow \quad \frac{U}{U_L} = \frac{\frac{R_a}{R_i}}{1 + \frac{R_a}{R_i}} = \frac{x}{1 + x}$$



Strom *I*:

$$I = \frac{U_L}{R_a + R_i} = \frac{U_L}{R_i} \frac{R_i}{R_a + R_i} = I_k \frac{R_i}{R_a + R_i}$$

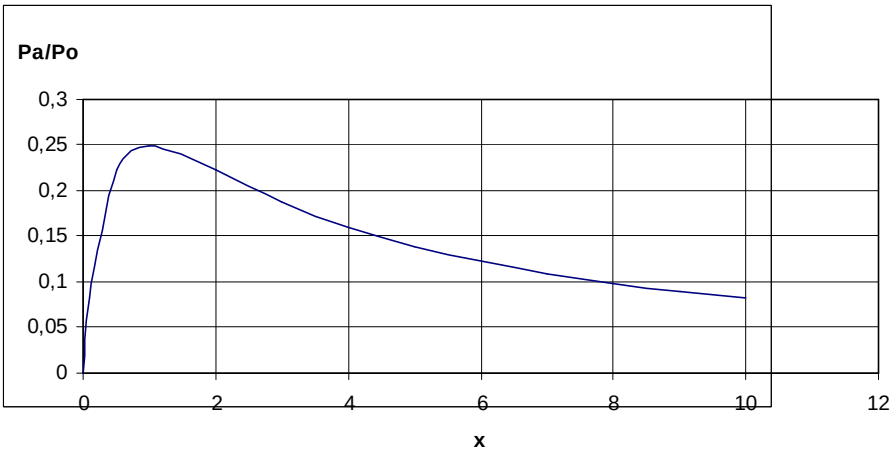
$$\frac{I}{I_k} = \frac{1}{\frac{R_a}{R_i} + 1} = \frac{1}{x + 1}$$



Leistung P_a an R_a:

$$P_a = UI = U_L \frac{R_a}{R_i + R_a} \frac{U_L}{R_i + R_a} = U_L \frac{U_L}{R_i} \frac{R_a R_i}{(R_i + R_a)^2} = U_L I_k \frac{R_a R_i}{(R_i + R_a)^2} = P_0 \frac{R_a R_i}{(R_i + R_a)^2}$$

$$\frac{P_a}{P_0} = \frac{R_a R_i / R_i^2}{(R_i + R_a)^2 / R_i^2} = \frac{\frac{R_a}{R_i}}{\left(1 + \frac{R_a}{R_i}\right)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$$



Maximum von P_a in Abhängigkeit von R_a:

$$P_a = P_0 \frac{R_a R_i}{(R_i + R_a)^2}$$

$$\frac{dP_a}{dR_a} = P_0 \frac{R_i (R_i + R_a)^2 - R_a R_i \cdot 2(R_i + R_a)}{(R_i + R_a)^2} = 0$$

$$R_i (R_i + R_a)^2 - R_a R_i \cdot 2(R_i + R_a) = 0$$

$$(R_i + R_a) = 2R_a \rightarrow \quad R_a = R_i = R$$

$$P_a = P_0 \frac{R^2}{(2R)^2} = \frac{P_0}{4}$$

Maximum von P_a in Abhängigkeit von $\boldsymbol{R_i}$:

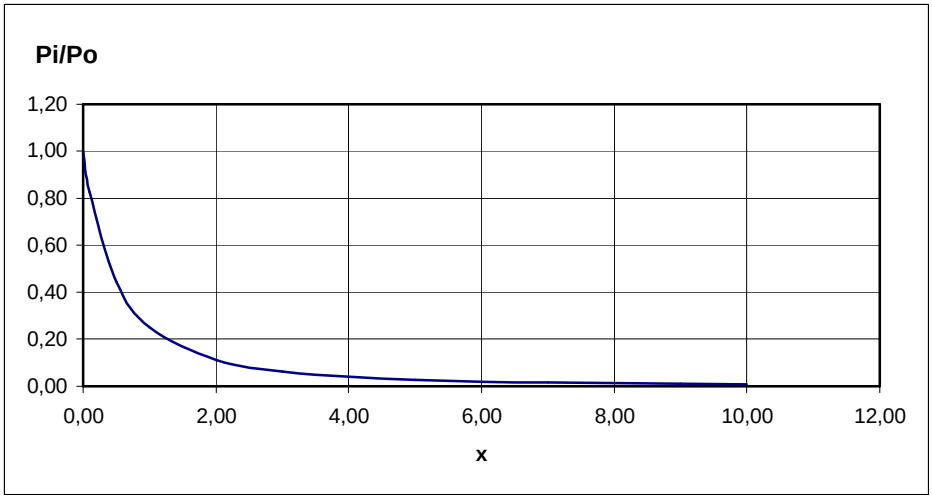
$$P_a = \frac{U_a^2}{R_a} = \frac{U_L^2}{R_a} \frac{R_a^2}{(R_i + R_a)^2} = U_L^2 \frac{R_a}{(R_i + R_a)^2}$$

P_a hängt in diesem Fall von R_i ab. *P*a wird dann am größten, wenn der Nenner am kleinsten ist. Das gilt für $R_i = 0$. Es gibt ein Extremum. Das ist aber nicht lokal, sondern global und kann deshalb durch Differenziation nicht gefunden werden. Führt man das Verfahren der Suche nach einem lokalen Extremwert durch, so ergibt sich als Lösung $R_i = - R_a$, was technisch nicht sinnvoll ist!

<u>Leistung *P*i an *R*i:</u>

$$P_i = I^2 R_i = \frac{U_L^2}{(R_i + R_a)^2} R_i = U_L \frac{U_L}{R_i} \frac{R_i^2}{(R_i + R_a)^2} = P_0 \frac{R_i^2}{(R_i + R_a)^2}$$

$$\frac{P_i}{P_0} = \frac{R_i^2}{(R_i + R_a)^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{R_a}{R_i}\right)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$$

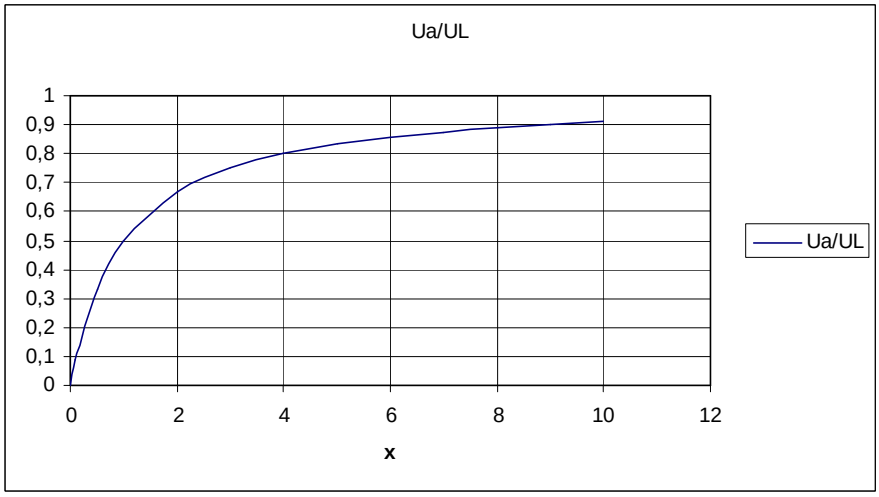


2) Für die gezeigte Schaltung stellen wir die Gleichungen für Spannung Strom und Leistung auf in Abhängigkeit von R_i auf.
In diesem Fall ist R_i nicht konstant, sondern R_a!!!!

Spannung *U*:

Hier ergeben sich keine Änderungen.

$$U = U_L \frac{R_a}{R_i + R_a} \rightarrow \quad \frac{U}{U_L} = \frac{R_a}{R_i + R_a} \rightarrow \quad \frac{U}{U_L} = \frac{\frac{R_a}{R_i}}{1 + \frac{R_a}{R_i}} = \frac{x}{1 + x}$$



Strom *I*:

Die Normierung auf I_k ist nicht sinnvoll, weil I_k nicht konstant ist!

$$I = \frac{U_L}{R_a + R_i} \rightarrow \qquad \text{Maximum für } R_i = 0$$

Leistung *P*a an *R*a:

Die Normierung auf I_k ist nicht sinnvoll, weil I_k nicht konstant ist!

$$P_a = UI = U_L \frac{R_a}{R_i + R_a} \frac{U_L}{R_i + R_a} = U_L^2 \frac{R_a}{(R_i + R_a)^2}$$

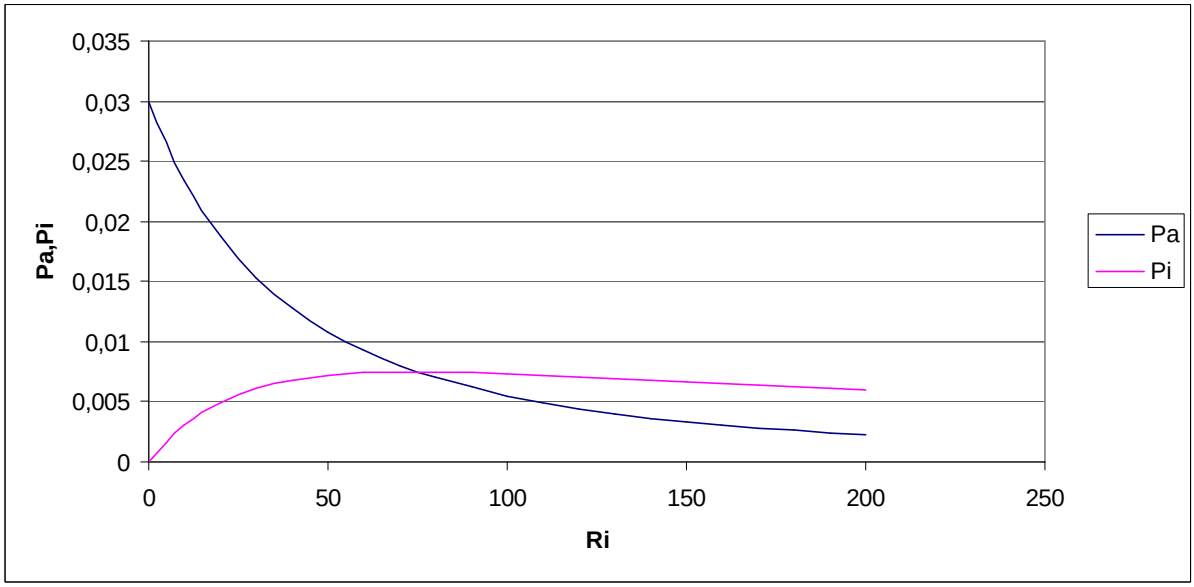
Maximum für $Ri = 0$

Innere Leistung:

$$P_i = I^2 R_i = U_L^2 \frac{R_i}{(R_i + R_a)^2}$$

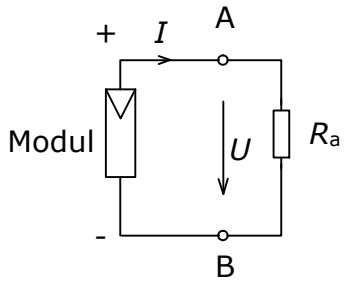
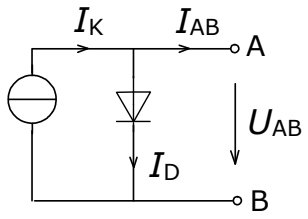
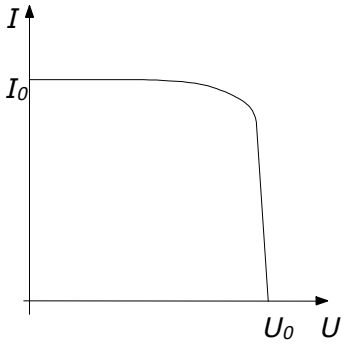
P_a hat ein Maximum für $R_i = 0$, Pi durchläuft ein lokales Maximum für $R_i = R_a$.

Grafisches Beispiel für $R_a = 75\ \Omega$ und $U_L = 1{,}5$ V



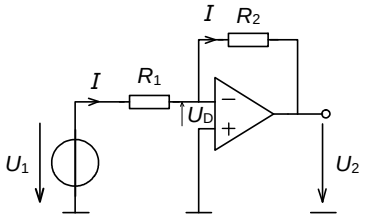
Solarmodul

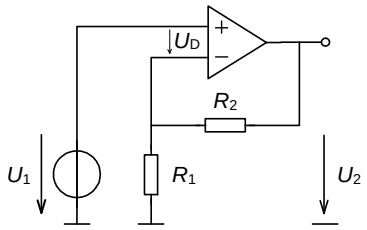
Gegeben ist die folgende Schaltung mit einem Solarmodul:

Schaltung	Ersatzschaltung für das Modul mit einer Stromquelle und einer Diode
	
Angenährtes Klemmverhalten des Moduls: $I = I_1 - aU^{10}$	Kennline:  U_0= 8 V, I_0 = 2 A
Aus der Kennlinie ermitteln wir zwei Wertepaare: $I = 0$; $U = U_0$ und $U = 0$; $I = I_0$	
Daraus kann man die Parameter bestimmen:	$I(U = 0) = I_0 \rightarrow I_1 = I_0 = 2\,\mathrm{A}$ $I(U = U_0) = 0 \rightarrow a = \frac{I_0}{U_0^{10}} = 1{,}86\,\mathrm{nA/V^{10}}$
Bei welcher Spannung U_{m1} wird die Leistung maximal:	$P = UI = UI_1 - aU^{11}$ Bestimmung des Maximum: $\frac{dP}{dU} = I_1 - 11aU^{10}$ $\left.\frac{dP}{dU}\right\|_{U=U_{m1}} = 0 \rightarrow U_{m1} = \sqrt[10]{\frac{I_0}{11a}} = 6{,}3\,\mathrm{V}$
Wie groß ist dann die Leistung:	$P_{m1} = U_{m1}(I_0 - aU_{m1}^{10}) = 11{,}4\,\mathrm{W}$
Wie groß muss in diesem Fall der Lastwiderstand sein:	$R_{a1} = \frac{U_{m1}^2}{P_{m1}} = 3{,}46\,\Omega$
Die Strahlungsintensität verringert sich, so dass ein Kurzschlussstrom nur noch von $I_0/2$ fließt, a bleibt konstant.	

Wie groß ist dann U_0* bei I = 0:	$U_0^* = \sqrt[10]{\frac{I_0}{2a}} = 7,5\ \mathrm{V}$
Wie groß ist dann die im Lastwiderstand R_{a1} umgesetzte Leistung unter der Annnahme $I = I_0/2$:	$P^* = \frac{I_0^2}{4} R_{a1} = 3,46\,\mathrm{W}$
Wie groß müsste der Lastwiderstand gewählt werden, damit P_m* maximal wird:	Wir berechnen unter Verwendung der oberen Formel U_{m2} und dann über die Kennlinie I_{m2} $U_{m2} = \sqrt[10]{\frac{I_0}{2 \cdot 11a}} = 5{,}873\ \mathrm{V}$ $I_{m2} = \frac{I_0}{2} - aU_{m2}^{10} = 909{,}091\ \mathrm{mA}$ $R_{a2} = \frac{U_{m2}}{I_{m2}} = \frac{\sqrt[10]{\frac{I_0}{2 \cdot 11a}}}{\frac{I_0}{2} - aU_{m2}^{10}} = 6,46\,\Omega$
Wie groß wird dann P_m:	$P_m = \frac{U_{m2}^2}{R_{a2}} = 5,3\,\mathrm{W}$

Operationsverstärker





a) Für die obere Schaltung mit einem Operationsverstärker ist das Spannungsverhältnis U_2/U_1 zu berechnen.

Dazu bilden wir eine erste Masche bestehend aus U_1, U_D und der Spannung über dem Widerstand R_1:

$$U_1 + U_D - IR_1 = 0 \rightarrow I = \frac{U_1 + U_D}{R_1}$$

Die zweite, große Masche liefert folgende Gleichung:

$$U_1 - vU_D - I(R_1 + R_2) = 0$$
$$vU_D = U_1 - I(R_1 + R_2)$$

I aus der ersten Gleichung in die zweite eingesetzt:

$$vU_D = U_1 - \frac{U_1}{R_1}(R_1 + R_2) - \frac{U_D}{R_1}(R_1 + R_2)$$
$$U_1\left(1 - \frac{(R_1 + R_2)}{R_1}\right) = U_D\left(v + \frac{(R_1 + R_2)}{R_1}\right)$$
$$U_1\frac{-R_2}{R_1} = U_D\left(v + \frac{(R_1 + R_2)}{R_1}\right)$$
$$U_D = -U_1\frac{1}{v\frac{R_1}{R_2} + \frac{(R_1 + R_2)}{R_1}} = \frac{U_2}{v}$$
$$\underline{\underline{U_2 = -U_1\frac{v}{v\frac{R_1}{R_2} + \frac{(R_1 + R_2)}{R_1}} = -U_1\frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + \frac{(R_1 + R_2)}{vR_1}}}}$$

$$\underline{\underline{\frac{U_2}{U_1} = -\frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + \frac{(R_1 + R_2)}{vR_1}}}}$$

$v \to \infty$

$$\underline{\underline{\frac{U_2}{U_1} = -\frac{R_2}{R_1}}}$$

b) Für die untere Schaltung mit einem Operationsverstärker ist das Spannungsverhältnis U_2/U_1 zu berechnen.

Wir berechen zuerst die Spannung über R_1 und können dann die Maschengleichung für den Eingangskreis aufstellen:

$$U_{R1} = U_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$U_1 - U_{R1} - U_D = 0$$

$$U_1 - U_{R1} - \frac{U_2}{v} = 0$$

$$U_2 = v\left(U_1 - U_{R1}\right) = v\left(U_1 - U_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)$$

$$U_2\left(1 + v\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right) = vU_1$$

$$\underline{\underline{U_2 = U_1 \frac{v}{\left(1 + v\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)} = U_1 \frac{1}{\left(\frac{1}{v} + \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)}}}$$

$$\underline{\underline{\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{v} + \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)}}}$$

$$v \to \infty$$

$$\underline{\underline{\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)} = 1 + \frac{R_2}{R_1}}}$$